

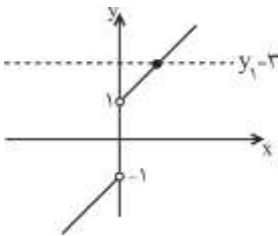


ردیف	سؤالات	نمره
۱	مساحت مربعی که یک راس آن $A(-1,3)$ و معادله ی یک ضلع آن $3x-4y+1=0$ است، بیابید.	۰/۷۵
۲	محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.	۱/۲۵
۳	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) جواب معادله‌ی $\sqrt{2-x^2} = x$ برابر می‌باشد. ب) اگر $f(x) = [x+3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2-\sqrt{2})$ برابر است. ج) اگر $\log 2 = 0.3, \log 3 = 0.47$ باشد، حاصل $\log 1500$ است. د) تابع $f(x) = \frac{1}{[x]}$ فقط در همسایگی $x=1$ تعریف می‌شود.	۲
۴	معادله‌ی $x + \frac{x}{ x } = 3$ را به روش هندسی حل کنید.	۱/۵
۵	دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. الف) مقدار $(f+g)(0)$ را به دست آورید. ب) دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.	۱
۶	اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$.	۱
۷	آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.	۱
۸	از ۲۰ گرم یک عنصر پس از یک ساعت ۵ گرم باقی مانده است. نیم عمر این عنصر چند دقیقه است؟	۱
۹	معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید. الف) $\log_{\sqrt{7}}^{x+3} + \log_{\sqrt{7}}^{x-3} = 2$ ب) $\log(x+4) = \frac{1}{2} \log(2x+11)$	۱/۵
۱۰	چرخ و فلکی به قطر ۱۶ متر در هر دقیقه یک دور در جهت مثبت مثلثاتی می‌زند، اگر ارتفاع پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ و فلک از سطح افق ۴ متر باشد و در لحظه‌ی $t_0 = 0$ شخصی در بالاترین نقطه‌ی چرخ و فلک قرار داشته باشد: الف) پس از گذشت چند ثانیه کمانی که کابین می‌پیماید $\frac{2\pi}{3}$ رادیان می‌شود. ب) پس از گذشت چند ثانیه فاصله‌ی کابین شخص از قطر افقی برای سومین بار ماکزیمم می‌شود. پ) تابعی که ارتفاع کابین را برحسب زمان در SI نشان می‌دهد را به دست آورید.	۱/۵
۱۱	درستی اتحاد $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ را ثابت کنید.	۱
۱۲	حاصل را بیابید. الف) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{5\pi}{12}\right)$ ب) $\frac{\cos 20 \sin 10}{\cos 10} - \sin 20$	۱/۵
۱۳	تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = a[x] + [x+1]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود باشد. [] نماد جزء صحیح است.	۰/۷۵
۱۴	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	۳

	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2} \quad \text{ب)}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2} \quad \text{الف)}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \quad \text{ج)}$	
۱/۲۵	$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، پیوستگی تابع را در $x=0$ بررسی کنید.	۱۵
۲۰	جمع	موفق باشید»

۴. نمودار دو تابع $y_1 = 3$ و $y_2 = x + \frac{x}{|x|}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و محل تلاقی آنها را می‌یابیم.

$$y_2 = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$



بنابراین خط $y_1 = 3$ ، نمودار تابع $y = x + \frac{x}{|x|}$ را در یک نقطه قطع می‌کند. محل تلاقی را از معادله‌ی زیر می‌یابیم:

$$x+1=3 \rightarrow x=2$$

۵. الف

$$\begin{aligned} (f+g)(0) &= f(0)+g(0) = \frac{0+1}{0-2} + \sqrt{0+4} \\ &= \frac{-1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ب

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \text{ و } D_g = [-4, +\infty)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$= ([-4, +\infty) - \{2\}) - \{-4\} = (-4, +\infty) - \{2\}$$

۶.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 - 4x + 5 \quad (1)$$

در تابع $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ، $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2 \quad (2)$$

سمت چپ دو معادله‌ی (۱) و (۲) با هم برابرند، پس سمت راست آنها نیز با هم برابر است.

$$g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^2 + 1 = (x - 2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2)$$

$$\Rightarrow g(x) = \pm(x - 2) - 1$$

۷. اگر به ازای دو مقدار متمایز از دامنه‌ی تابع $(x_1 \neq x_2)$ ، مقادیر y (خروجی) برابر باشد تابع یک به یک نیست. در این تابع خواهیم داشت:

$$f(0) = 0 \text{ و } f(2) = 0$$

۱. از آن جا که مختصات نقطه ی A در معادله خط صدق نمی کند، طول ضلع مربع برابر با فاصله نقطه از خط می شود.

$$a = \frac{|3x_A - 4y_A + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 12 + 1|}{5} = \frac{14}{5}$$

$$S = a^2 = \left(\frac{14}{5}\right)^2 = \frac{196}{25}$$

۲. اگر طول مستطیل را با a و عرض آن را با b نمایش دهیم آنگاه:

$$\text{محیط: } 2(a+b) = 18 \Rightarrow S = a+b = 9$$

$$\text{مساحت: } ab = 14 \Rightarrow P = ab = 14$$

بنابراین اضلاع مستطیل ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = 7$$

پس $a = 7$ و $b = 2$.

۳. الف) دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم:

$$2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ و } x \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2}$$

حال طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{0 \leq x \leq \sqrt{2}} x = 1$$

ب

$$f(2 - \sqrt{2}) = [2 - \sqrt{2} + 3] = [5 - \sqrt{2}]$$

$$\approx [5 - 1/4] = [3/6] = 3$$

ج

$$\log 1500 = \log(3 \cdot 5 \cdot 100) = \log 3 + \log 5 + \log 10^2$$

$$= \log 3 + \log\left(\frac{10}{2}\right) + 2\log 10$$

$$= \log 3 + \log 10 - \log 2 + 2\log 10$$

$$= 0.47 + 1 - 0.3 + 2 = 3.17$$

د

راست: دامنه ی تابع F را می یابیم

مخرج مساوی صفر

$$[x] = 0 \rightarrow 0 \leq x < 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$$

با توجه به دامنه تابع در همسایگی راست تعریف می شود.

پس تابع یک به یک نیست.

اگر خود لحظه‌ی $t=0$ را در نظر بگیریم 60 ثانیه می‌شود.

(پ)

$$y = r \sin(\omega t + \theta_0) + y_0 \quad T = 60$$

$$r = 8, \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{60} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{30}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 8 + 4 = 12$$

$$\text{لذا: } y = 8 \sin\left(\frac{\pi}{30}t + \frac{\pi}{2}\right) + 12$$

۸.

$$Q(t) = A\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow{A=20, t=60, Q(60)=5} Q(60) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{T}} = 5$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{T}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{60}{T} = 2 \rightarrow T = 30$$

۹.

(الف)

از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sin x + \cos x$$

$$\log_{\sqrt{7}}^{(x-3)(x+3)} = 2 \rightarrow (x+3)(x-3) = (\sqrt{7})^2 = 7$$

$$x^2 - 9 = 7 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$$

$x = -4$ غیر قابل قبول است زیرا به ازای آن عبارت جلوی

لگاریتم ها منفی می‌شود.

۱۲. (الف)

$$\cos \frac{\Delta\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12}$$

(ب)

$$\text{لذا: } a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{2}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\text{و } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{4} - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\log(x+4) = \frac{1}{2} \log(2x+11)$$

$$\rightarrow 2 \log(x+4) = \log(2x+11)$$

$$\rightarrow \log(x+4)^2 = \log(2x+11)$$

$$\rightarrow (x+4)^2 = 2x+11$$

$$\rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$$

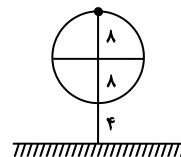
$x = -5$ غیر قابل قبول است، زیرا به ازای آن عبارت جلوی

$\log(x+4)$ منفی خواهد شد.

(ب)

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos 20 \sin 10 - \cos 10 \sin 20}{\cos 10} \\ &= \frac{\sin(10 - 20)}{\cos 10} = \frac{-\sin 10}{\cos 10} = -\tan 10 \end{aligned}$$

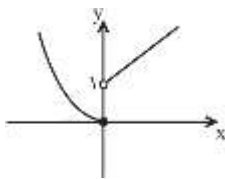
۱۰. (الف)



$$60' \quad \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{60 \times \frac{2\pi}{3}}{2\pi} \rightarrow t = 20s$$

(ب) در هر نصف دور (π) یک بار فاصله Max است پس:

$$60' \quad \frac{2\pi}{\pi + \pi + \pi} \Rightarrow t = \frac{3\pi \times 60}{2\pi} \rightarrow t = 90s$$



$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\Rightarrow L_1 \neq L_2$$

تابع f در $x=1$ ناپیوسته است.

۱۵

۱۳

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود باشد یعنی حد چپ و راست تابع در $x=1$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + [x+1]) = a+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a[x] + [x+1]) = 0+1=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

۱۴ الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2x-2} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$$

ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ را دارد.} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$